



TITLE:

# Lattice Green's Functionとその微分 (Lattice Green's Function)

AUTHOR(S):

萬成, 勲; 川部, 健

---

CITATION:

萬成, 勲 ...[et al]. Lattice Green's Functionとその微分 (Lattice Green's Function). 数理解析  
研究所講究録 1971, 130: 166-175

ISSUE DATE:

1971-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106572>

RIGHT:

# Lattice Green's Function

とその微分

岡大 理 萬成 勲, 川部 健

## § 1. Extended Watson Integral $I_{lmn}(\mu; \alpha)$

単純立方格子において,  $z$  方向の異方性をもつ Lattice Green Function を次の式により定義する.

$$I_{lmn}(\mu; \alpha) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos lx \cos my \cos nz}{\frac{1}{\mu} \frac{2+\alpha}{3} - \frac{\cos x + \cos y + \alpha \cos z}{3}} dx dy dz \quad (1.1)$$

(1.1) において,  $l, m, n$  は整数で格子点の位置  $R = (l, m, n)a$  に関係づけられる. 但し,  $a$  は格子定数.  $\alpha$  は  $z$  方向の結合の異方性を示す変数である. ここでは

$$\alpha > 0 \quad (1.2)$$

の場合を考える.  $\mu$  については

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad (1.3)$$

の範囲に限り, この時の定義 (1.1) を特に Extended Watson Integral と呼ぶことにする.

$I_{000}(\mu; d)$  及び  $d=1$  のとき  $(lmn)$  の簡単な場合の研究は既に詳しく調べられているが<sup>1), 2)</sup>ここでは  $(lmn)$  の一般の場合を取扱う。  $I_{lmn}(\mu; d)$  について結晶の対称性から

$$I_{lmn}(\mu; d) = I_{lm\bar{n}}(\mu; d), \quad (1.4)$$

$$I_{lmn}(\mu; d) = I_{\pm l \pm m \pm n}(\mu; d),$$

及び sum rule

$$\sum_{\Delta} I_{(lmn)+\Delta}(\mu; d) = -6 \delta_{l0} \delta_{m0} \delta_{n0} + \frac{1}{\mu} (4+2d) I_{lmn}(\mu; d) + (1-d) \{ I_{lmn+1}(\mu; d) + I_{lmn-1}(\mu; d) \}, \quad (1.5)$$

が成り立つことは容易に示される。(1.5)で  $\Delta$  sum は最近接格子点についての和である。

## § 2. $I_{lmn}(\mu; d)$ とその微分の計算

$I_{00n}(\mu; d)$  及び  $I_{l00}(\mu; d)$  はそれぞれ次の様な 1 重積分に変形される。

$$I_{00n}(\mu; d) = \frac{12}{\pi} \int_0^{1/4} k K(k) \cos 4n\pi \xi \, d\xi, \quad (2.1)$$

$$k = 2\mu / (2+d - d\mu \cos 4\pi \xi), \quad (2.1a)$$

$$I_{l00}(\mu; d) = \frac{12}{\pi \sqrt{d}} \int_0^{1/4} k K(k) \cos 4l\pi \xi \, d\xi \quad (2.2)$$

$$k = 2\mu \sqrt{d} / \sqrt{(2+d - \mu \cos 4\pi \xi)^2 - (d-1)^2 \mu^2} \quad (2.2a)$$

(2.1), (2.2) において,  $K(k)$  は第1種完全楕円積分である.

$I_{lmn}(\mu; \alpha)$  は (1.4), (1.5) より  $I_{00n}(\mu; \alpha)$  及び  $I_{l00}(\mu; \alpha)$  を用いて表わすことが出来る. 次に  $I_{lmn}(\mu; \alpha)$  を級数展開の形で求めてみる.  $I_{lmn}(\mu; \alpha)$  を変形ベッセル関数  $I_\nu(t)$  を用いて表わすと.

$$I_{lmn}(\mu; \alpha) = 3 \int_0^\infty I_l(t) I_m(t) I_n(t) \exp\{-(2+\alpha)t/\mu\} dt. \quad (2.3)$$

$$I_\nu(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{\nu+2s}}{s! \Gamma(\nu+s+1)}, \quad (2.4)$$

に留意すれば (2.3) はさらに次の様な級数展開に変形される.

$$I_{lmn}(\mu; \alpha) = \sum_{p,q,r=0}^{\infty} \frac{L!}{p! (p+l)! q! (q+m)! r! (r+n)!} \times \frac{\{3\mu/(2+\alpha)\}^{L+1} \alpha^{2r+n}}{6^L}, \quad (2.5)$$

ここで,

$$L = 2(p+q+r) + l + m + n, \quad (2.6)$$

次に  $I_{lmn}(\mu; \alpha)$  の  $\mu$  に関する微分について考える. (2.1) より  $I_{00n}(\mu; \alpha)$  の微分は次の形で与えられる.

$$\frac{dI_{00n}(\mu; \alpha)}{d\mu} = \frac{6(2+\alpha)}{\pi\mu^2} \int_0^{1/4} \frac{k^2 E(k) \cos 4n\pi\xi}{1-k^2} d\xi, \quad (2.7)$$

$$k = 2\mu / (2+\alpha - \alpha\mu \cos 4\pi\xi). \quad (2.7a)$$

ここで  $E(k)$  は第2種完全楕円積分である. 同様にして.

$I_{l00}(\mu; d)$  の微分形は (2.2) より.

$$\frac{dI_{l00}(\mu; d)}{d\mu} = \frac{3(2+d)}{\pi d \sqrt{d} \mu^2} \int_0^{1/4} \frac{k^2 \sqrt{4d + k^2(d-1)^2} E(k) \cos 4l\pi\xi}{1-k^2} d\xi, \quad (2.8)$$

$$k = 2\mu\sqrt{d} / \sqrt{(2+d - \mu \cos 4l\pi\xi)^2 - (d-1)^2 \mu^2} \quad (2.8a)$$

で与えられる。  $dI_{lmn}(\mu; d)/d\mu$  については  $I_{lmn}(\mu; d)$  を求めた場合と同様に, (1.4), (1.5) の関係から (2.7), (2.8) を用いて求められる。

### §3. $I_{lmn}(\mu; d)$ の漸近形

#### (i) $\mu \sim 1$

先ず  $I_{00n}(\mu; d)$  について考える。

$$F(\varepsilon) \equiv I_{00n}(\mu; d), \quad (3.1)$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \mu, \quad (3.1a)$$

とおく。  $F(\varepsilon)$  を  $\varepsilon \ll 1$  として展開すれば

$$F(\varepsilon) = F(0) + \frac{dF}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{d\varepsilon^2} \varepsilon^2 + \dots, \quad (3.2)$$

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = -2\varepsilon \frac{dI_{00n}}{d\mu}, \quad \frac{d^2 F}{d\varepsilon^2} = -2 \frac{dI_{00n}}{d\mu} + 4\varepsilon^2 \frac{d^2 I_{00n}}{d\mu^2}, \dots \quad (3.3)$$

(2.7), (2.7a) から  $dI_{00n}(\mu; d)/d\mu$  の被積分関数は  $\xi \sim 0$

で最も大きな寄与をするから、その次の1項は、

$$\begin{aligned} \frac{dI_{00n}}{d\mu} &\sim \frac{6(2+\alpha)}{\pi} \int_0^{1/4} \frac{E(1)}{(2+\alpha)(1-\mu) + 8\pi^2\alpha\xi^2} d\xi \\ &= \frac{3\sqrt{2+\alpha}}{2\sqrt{2\alpha}\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\mu}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$dI_{00n}(\mu; \alpha)/d\mu$  についても、(3.4)と同じ結果が得られる。  
(3.1), (3.2) から

$$I_{00n}(\mu; \alpha) = I_{00n}(1; \alpha) - \frac{3\sqrt{2+\alpha}}{\sqrt{2\alpha}\pi} \sqrt{1-\mu} + O(1-\mu). \quad (3.5)$$

$I_{l00}(\mu; \alpha)$  についても同様な展開が得られる。従って、 $I_{lmn}(\mu; \alpha)$  の  $\mu \sim 1$  における展開は次の様に表わることが出来る。

$$I_{lmn}(\mu; \alpha) = I_{lmn}(1; \alpha) - \frac{3\sqrt{2+\alpha}}{\sqrt{2\alpha}\pi} \sqrt{1-\mu} + O(1-\mu). \quad (3.6)$$

展開の次の項は  $(1-\mu)^{1/2}$  で、その係数は一般に  $l, m, n$  に依存する。簡単な場合について、 $(1-\mu)^{1/2}$  の係数を数値実験で求めた結果を示しておく。

	$(1-\mu)^{1/2}$ の係数
$I_{000}(\mu; 1)$	-0.4379
$I_{100}(\mu; 1)$	1.0785
$I_{110}(\mu; 1)$	1.8367
$I_{200}(\mu; 1)$	2.6604

他の結晶型について. BCC, FCC の  $I_{000}(\mu; 1)$  はオ1種楕円積分の形で表わされる<sup>3), 4)</sup> から  $(1-\mu)^4$  の係数も比較的容易に求められる。結果は  $-0.5511$  (BCC),  $-0.5452$  (FCC) でこれは数値実験で得られる結果と一致している。

(ii)  $\mu \sim 0$

この場合には級数展開による方法, (2.5) が有効となる。そのオ1項だけを示すと。

$$I_{lmn}(\mu; \alpha) = \frac{3 \cdot N!}{2^N l! m! n!} \frac{\alpha^n}{(2+\alpha)^{N+1}} \mu^{N+1} + O(\mu^{N+3}), \quad (3.7)$$

$$N = l + m + n. \quad (3.8)$$

(iii)  $\alpha \rightarrow \infty$  ( $\mu \neq 1$ )

$$\alpha I_{000}(\mu; \alpha) = 3 I_1(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \beta_n(\mu)}{\alpha^n n!} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^n \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}, \quad (3.9a)$$

$$= \frac{3\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \left\{ 1 - \frac{2}{\alpha} \frac{1}{1-\mu^2} + \dots \right\}, \quad (3.9b)$$

(3.9a) において。

$$t = \frac{1}{\mu},$$

$$I_1(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{\frac{1}{\mu} - \cos z}, \quad (3.10)$$

$$\beta_n(\mu) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\mu} - (\cos x + \cos y) \right\}^n dx dy.$$

(iv)  $\alpha \rightarrow \infty$  ( $\mu = 1$ )

(2.2) から

$$I_{000}(1; \alpha) = \frac{12}{\pi \sqrt{\alpha}} \int_0^{1/4} k K(k) d\xi, \quad (3.11)$$

$$k = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(\alpha + \sin^2 2\pi\xi)(1 + \sin^2 2\pi\xi)}}. \quad (3.11a)$$

$k$  及び " $K(k)$ " を  $1/\alpha \ll 1$  として  $k_0 = 1/\sqrt{1 + \sin^2 2\pi\xi}$  の  
まわりで展開すれば、

$$k K(k) = k_0 K(k_0) - \frac{E(k_0)}{2k_0} \frac{1}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right). \quad (3.12)$$

従って  $\alpha \rightarrow \infty$  のとき

$$I_{000}(1; \alpha) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left( A + B \frac{1}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right). \quad (3.13)$$

そこで

$$A = \frac{12}{\pi} \int_0^{1/4} k_0 K(k_0) d\xi = 1.9286467 \quad (3.14)$$

$$B = -\frac{6}{\pi} \int_0^{1/4} \frac{E(k_0)}{k_0} d\xi = -0.71856855$$

(v)  $\alpha \rightarrow 0$  ( $\mu \neq 1$ )

$$I_{000}(\mu; \alpha) = \frac{3}{2} I_2(\mu) + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \gamma_n(\mu)}{2^n n! \pi} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^n 2\mu K(\mu) \quad (3.15a)$$

$$= \frac{3}{\pi} \mu K(\mu) \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{E(\mu)}{K(\mu)} + \dots \right\}. \quad (3.15b)$$



(3.15a) で

$$t = \frac{1}{\mu},$$

$$I_2(\mu) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{\frac{1}{\mu} - \frac{\cos x + \cos y}{2}} dx dy, \quad (3.16)$$

$$\gamma_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1}{\mu} - \cos z \right)^n dz.$$

(vi)  $\alpha \rightarrow 0$  ( $\mu = 1$ )

(2.1) から

$$I_{000}(1; \alpha) = \frac{12}{\pi} \int_0^{1/4} k K(k) d\xi, \quad (3.17)$$

$$k = \frac{1}{1 + \alpha \sin^2 2\pi \xi}. \quad (3.17a)$$

 $k \sim 1$  における  $K(k)$  の展開公式<sup>5)</sup>を用いると.

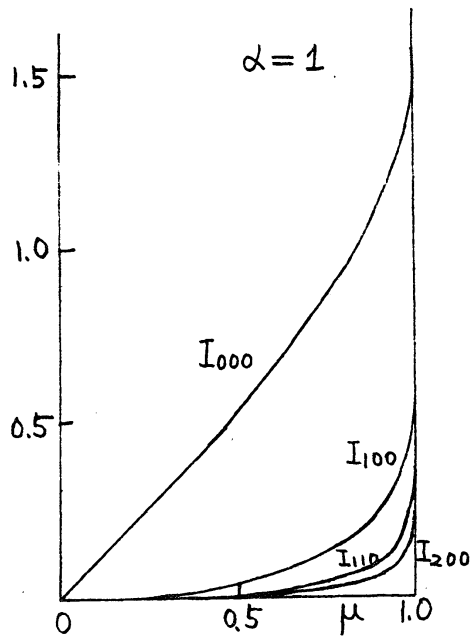
$$K(k) = -\frac{1}{2} \log \alpha + \frac{3}{2} \log 2 - \log(\sin 2\pi \xi) + O(\alpha \log \alpha). \quad (3.18)$$

従って  $\alpha \rightarrow 0$  のとき

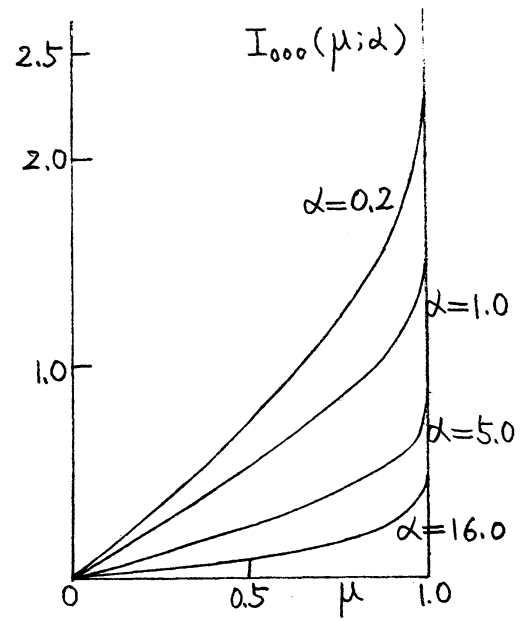
$$I_{000}(1; \alpha) = -\frac{3}{2\pi} \log \alpha + \frac{15}{2\pi} \log 2 + O(\alpha \log \alpha). \quad (3.19)$$

最後に、 $I_{lmn}(\mu; \alpha)$  及びその微分について、 $(lmn)$  の簡単な場合に数値実験で得た結果をオ1図～オ4図に示しておく。

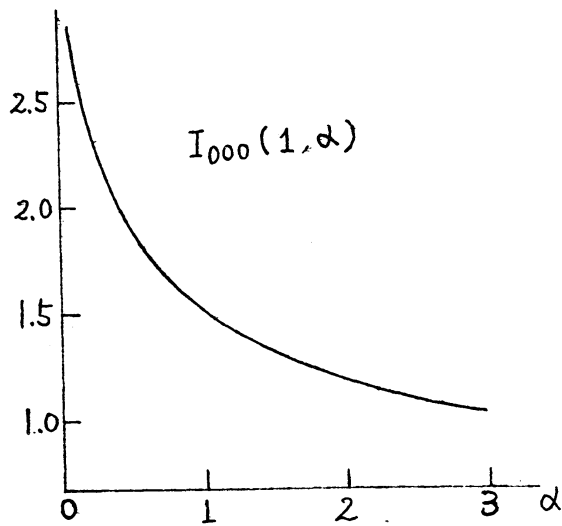
\* 1 図



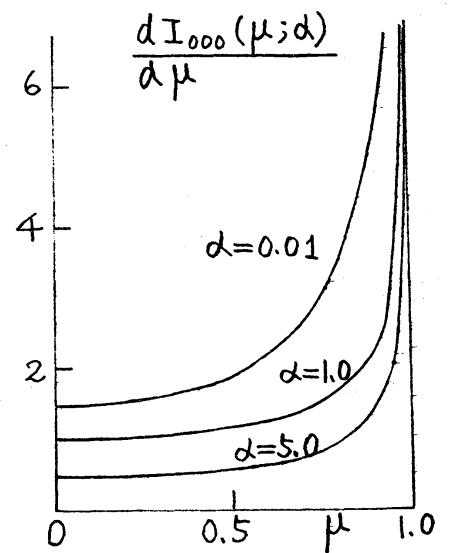
\* 2 図



\* 3 図



\* 4 図



## 参考文献

- 1) I. Mannari and T. Kawabe, Prog. Theor. Phys. 44(1970) 359.
- 2) T. Kawabe and I. Mannari, Rep. Res. Lab. for SURFACE SCIENCE, Okayama Univ. 3 (1970) 211.
- 3) I. Mannari and C. Kawabata, Res. Notes Dept. Phys., Okayama Univ. No. 15 (1964). P. 4.
- 4) G. Iwata, Natural Sci. Report, Ochanomizu Univ. 20 (1969) 13.
- 5) E. Jahnke and F. Emde, Tables of Functions with Formulae and Curves, 2nd edition (1939) P. 145.